# ANWENDUNGSORIENTIERTE MATHEMATIK IM SCHULUNTERRICHT

Wolfgang Schlöglmann, Linz

## 0. VORBEMERKUNG

Anwendungsorientierte Mathematik war in den letzten Jahren mehrmals Thema eines Vortrags auf dem von der ÖMG veranstalteten Lehrerfortbildungstag. Um diesen einen weiteren Aspekt beizufügen, wird der folgende Beitrag einen längeren historischen Teil beinhalten. Dieser soll auch helfen, den anwendungsorientierten Mathematikunterricht in die notwendige Gesamtsicht der Mathematik einzubetten.

## I. ZUR GESCHICHTE DER ANWENDUNG VON MATHEMATIK

In diesem Punkt soll versucht werden an einigen Fallbeispielen wichtige Gesichtspunkte, die beim Anwenden von Mathematik auftreten, herauszuarbeiten.

### 1. ALTORIENTALISCHE ENTWICKLUNG DER MATHEMATISCHEN METHODEN

#### 1.1. Vom Beginn der Seßhaftwerdung bis zur Entstehung von Stadtstaaten (9000 v.u.Zt. - 3000 v.u.Zt.)

Um etwa 9000 v.u.Zt. begann in Vorderasien die Seßhaftwerdung des Menschen. Dies war verbunden mit dem Übergang vom Nahrungsmittelsammeln zur Nahrungsmittelproduktion. Von den entstehenden dörflichen Gemeinschaften wurden nun Viehzucht und Ackerbau betrieben. Die vorherrschende Form des Ackerbaus, der Regenfeldbau, ist nur in Gebieten mit genügend großer Niederschlagsmenge möglich. Im Zuge der nun erfolgenden Umgestaltung des menschlichen Lebens kam es zu einer raschen Zunahme der Bevölkerung (Verminderung der Kindersterblichkeit, Erhöhung des Lebensalters), sodaß in den bewohnten Gebieten ein dichtes Netz von Dörfern entstand. Das Siedlungsgebiet schob sich immer mehr in Gebiete mit geringeren Niederschlagsmengen vor und erreichte gegen Ende der Periode die Grenzen des Regenfeldbaus. Die neuen sozialen Strukturen führten zu neuen Sitten, Rechtsgrundsätzen und Veränderungen im religiösen Bereich. Die wirtschaftliche Situation erforderte nun eine gezielte Bevorratung und Aufzeichnungen über den Viehbestand. Als Hilfsmittel dazu dienten die sogenannten "Rechensteine". (Die Bedeutung dieser ersten Rechenmittel wurde erst in den letzten Jahrzehnten erkannt.)

Die ältesten Funde von Rechensteinen reichen bis ins 9. Jahrtausend, dem Beginn der Seßhaftwerdung zurück. Sie waren das gebräuchliche Rechenmittel und dienten auch zur Dokumentation der verschiedenen Güter, bis sie von schriftlichen Aufzeichnungen verdrängt wurden.

Die mit Hilfe der Rechensteine durchgeführte mechanische Buchführung erforderte eine ständige Anpassung dieser an eine etwaige geänderte Güterproduktion. So kam es im 4. Jahrtausend mit der Bildung von städtischen Zentren auch zu einer extensiven Entwicklung im Bereich der Rechensteintechnik. Lassen sich bei den ersten Funden etwa 20 verschiedene Rechensteinarten unterscheiden, so sind nun etwa 15 Hauptarten nachweisbar. Dies zeigt deutlich, daß die beginnende Bewässerungswirtschaft, die von Formen der Konzentration der politischen und ökonomischen Macht in der Hand einzelner (meist Priester) begleitet war, neuartige Probleme der Wirtschaftsführung (zentralisierter Arbeitseinsatz, Massenproduktion, Ausweitung des Handels, Spezialisierung des Handwerks, Verwaltung des Mehrproduktes) aufwarf, die auch durch extensivere Formen der Rechensteintechnik nicht mehr bewältigt werden konnten und nach neuen Formen verlangten.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Art des Operierens mit Rechensteinen auch wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung der arithmetischen Operationen hatte. (Für eine ausführliche Besprechung des Einflußes der Rechensteine sei auf Damerow-Lefevre: "Rechenstein, Experiment, Sprache" verwiesen.)

## 1.2. Periode der Stadtstaaten

Das Vordringen der Siedlungen in Zonen, in denen ein Regenfeldbau wegen der zu geringen Niederschlagsmengen nicht mehr möglich war, erforderte zum Bau und zur Erhaltung von Bewässerungsanlagen eine Konzentration von Arbeitskräften. Da diese Aufgaben von den kleinen Dorfgemeinschaften nicht hätten bewältigt werden können, entstanden die ersten Stadtstaaten (von Süden nach Norden: Eridu, Ur, Uruk, Badtibira, Lagaš, Ninâ, Girsus, Umma, Nippur, Kiš, Sippar und Akšak). Die ersten Herrscher der Stadtstaaten waren die Priesterkönige, die als Stellvertreter des Gottes auf Erden galten. Besitzer des Landes und aller Güter war Gott, der dies durch den Priesterkönig verwalten ließ. Das Zentrum der Verwaltung war der Tempel. (Das Auftreten sakraler Großbauten ist charakteristisch für diese Epoche.) Häufig wird die in dieser Zeit bestehende soziale Struktur auch als "religiöser Staatssozialismus" bezeichnet, denn vom Tempel aus werden alle Arbeitseinsätze organisiert, werden Handel betrieben und die Bestände verwaltet. Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, erforderte die Tempelverwaltung rationellere Formen der Dokumentation. Die Schrift und die

Zahlzeichen wurden entwickelt. Diese Entwicklung der Dokumentationsmittel wurde von Personen (Priestern) betrieben, die nicht an der Güterproduktion beteiligt waren.

Nach dem bisher Gesagten ist es auch nicht verwunderlich, daß sowohl die ersten schriftlichen Überlieferungen, wie auch die ersten mathematischen Aufzeichnungen im weitesten Sinne, ökonomischer Natur waren.

### 1.3. Die ersten Großreiche

Die folgende geschichtliche Entwicklung ist gekennzeichnet von einer immer stärkeren Konzentration. Um ca. 2340 v.u.Zt. entstand das erste Großreich. Diese Entwicklung war begleitet von einem verstärkten Ausbau der Verwaltungseinrichtungen, einer Auseinanderentwicklung der religiösen und weltlichen Macht und dem Ausbau des privaten Eigentums.

Die neuen sozialen und wirtschaftlichen Gegebenheiten erforderten den Ausbau von Rechtsgrundsätzen für den wirtschaftlichen Ablauf und auch Mittel zu ihrer Realisierung.
So kann z.B. die Entwicklung der Zins- und Zinseszinsrechnung gesehen werden, die dazu diente den Geschäftsverkehr für die beteiligten Personen sicher und nachvollziehbar zu machen. Insgesamt kommt es in dieser Periode zu einem starken Ansteigen der schriftlichen Aufzeichnungen und einem Ausbau der mathematischen Methoden, insbesondere im Bereich der Arithmetik und Geometrie, wobei das Rechnen durch die Erstellung von Multiplikationstafeln erleichtert wurde.

Wichtig für diese Entwicklung war neben den sozio-ökonomischen Notwendigkeiten der Umstand, daß in "Schreibschulen" eine planmäßige Ausbildung vollzogen wurde. Überhaupt dürfte der Einfluß der Ausbildung und die dabei auftretende Notwendigkeit der Vermittlung wesentlich zur Entwicklung der Mathematik beigetragen haben.

So sind viele der gefundenen "echten" mathematischen Texte, Übungstexte bzw. Prüfungsarbeiten aus den Schulen. Hier finden sich auch erstmals sogenannte *"eingekleidete Aufgaben"*, bei denen die mathematische Methode im Vordergrund steht.Unter dem Einfluß der Ausbildung kommt es scheinbar, wie wir im Rückblick sagen könnten, zur Strukturierung des Anwendungsprozesses: Problem - - Realmodell - mathematisches Modell - Anwendung der Ergebnisse.

Das Studium des mathematischen Modells für sich allein entspricht dem didaktischen Prinzip der Isolation der Schwierigkeiten.

(Høyrup hat in seiner Arbeit: "Influence of Institionalized Mathematics Teaching on the Development and Organization of Mathematical Tought in the Premodern Period" gerade diese Frage untersucht.)

## 2. ZUR ENTSTEHUNG DER MATHEMATIK ALS WISSENSCHAFT

Wann ist nun der Zeitpunkt der Entstehung der "wissenschaftlichen" Mathematik anzusetzen? Dies ist natürlich in erster Linie eine Frage der zu erfüllenden Kriterien. Heute werden als solches u.a. der systematisch-deduktive Aufbau, bei dem dem Beweis eine zentrale Rolle zufällt, herangezogen. Unter diesen Gesicntspunkten besteht allgemein Übereinstimmung, daß die Mathematik als Wissenschaft ein Produkt des antiken Griechenlands ist.

Wohl weiß man heute, daß die babylonische Mathematik in vielen Bereichen weiter entwickelt war als die griechische beim Übergang zur wissenschaftlichen Mathematik. Auch haben die Griechen sehr viele Kenntnisse von den Völkern Mesopotamiens und Ägyptens übernommen, doch wurden nirgends Ansätze gefunden, daß diese den Versuch gemacht hätten allgemeine Sätze zu formulieren, und diese streng logisch abzuleiten.

Gerade diese Erkenntnis fördert die Ansicht, daß die Herausbildung der Mathematik als Wissenschaft sich nicht zwingend bei einem entsprechenden Stand der Methoden ergibt. Mit anderen Worten, diese Entwicklung ist kein innermathematischer Vorgang, denn sonst hätte diese den Babyloniern mit ihrer hochentwickelten Mathematik viel eher gelingen müssen. Es liegt hier ein qualitativer Sprung vor, der nur mit außermathematischen Mitteln erklärt werden kann.

Ein hervorstechendes Merkmal der wissenschaftlichen Mathematik der Frühzeit war ihre anti-empirische Einstellung und damit verbunden ihre Ablehnung der praktischen Aspekte der Mathematik. Mathematik wurde nicht ihrer Anwendung wegen, sondern aus anderen Zielsetzungen betrieben. Worin lagen nun diese? Als Begründer der wissenschaftlichen Mathematik werden die Pythagoreer angesehen, die wir nach heutigen Vorstellungen eher als Anhänger einer religiösen Sekte, denn als Wissenschafter bezeichnen würden. Die Anhänger Pythagoras', die aus aristokratischen Kreisen stammten, schlossen sich zu einem Geheimbund zusammen, um nach den Vorstellungen ihres Propheten zu leben. Dieser verlangte von ihnen ein asketisches Klosterleben, lehrte u.a. die Seelenwanderung und als Teil seiner Religion auch die Mathematik, durch die eine

Vereinigung mit Gott erreicht werden sollte. Nach den Vorstellungen der Pythagoreer hatte Gott den Kosmos nach Zahlen geordnet. Gott sei die Einheit, die aus Gegensätzen bestehe. Um Einheit in die Gegensätze zu bringen und sie zu einem Kosmos zu vereinigen, sei die Harmonie notwendig. Die Harmonie sei göttlich und bestehe in Zahlenverhältnissen. Wer diese ergründen lernt, wird selbst göttlich und unsterblich.

Es ist in Betrachtung dieser Gründe einleuchtend, daß die Pythagoreer nicht an praktisch verwertbaren Erkenntnissen interessiert waren, ja diese sogar ablehnten, da sie doch Überirdisches erreichen wollten.

Diese Haltung zusammen mit der eleatischen Philosophie, die u.a. betonte, daß die Wahrheit nicht durch irreführende sinnliche Wahrnehmung, sondern nur mit dem Denken erfaßt werden könnte, bildeten die Voraussetzungen für eine Entwicklung, die wir heute als Entstehung der Wissenschaft Mathematik bezeichnen.

Ich möchte darauf hinweisen, daß diese anwendungsfeindliche Einstellung nicht für die gesamte Weiterentwicklung der griechischen Mathematik charakteristisch war. So beschäftigten sich z.B. Archimedes und Appolonius sowohl mit der Lösung von mathematischen Problemen in Astronomie, Mechanik, Optik und Akustik. Diese Vereinigung von reiner und angewandter Mathematik in Person des Mathematikers blieb bis ins 18. Jahrhundert bestehen.

## 3. ZUR ENTWICKLUNG DER TRIGONOMETRIE AM BEGINN DER NEUZEIT

An der Wende vom Mittelalter zur Neuzeit erfolgte neben Fortschritten in anderen Teilgebieten der Mathematik auch ein bemerkenswerter Aufschwung der Trigonometrie in Europa. (Derselbe Prozeß hatte sich in der islamischen Welt schon etwa 200 Jahre zuvor vollzogen und wurde durch das Werk von Nasir ed-din AT.-TUSI "Abhandlung über das vollständige Vierseit" abgeschlossen.) Diese Entwicklung wurde vor allem von österreichischen und deutschen Mathematikern getragen.

Welche soziale und wirtschaftliche Situation kennzeichnete diese Zeit? Die im Mittelalter herrschende Feudalstruktur ist in Auflösung begriffen. Das aufstrebende Bürgertum versucht zu seiner neuerhaltenen wirtschaftlichen Macht auch politische Gleichberechtigung mit dem Adel zu erlangen. Bedingt waren diese tiefgreifenden Änderungen durch eine Umgestaltung der Wirtschaftsstruktur. Diese beruhte auf dem Einsatz neuer bzw. verbesserter Produktionsmittel und -verfahren, sowie der durch die Entdeckung neuer Länder erfolgten Ausweitung des Handels. Die für die Erreichung ferner Länder am Seeweg notwendige

Orientierung am offenen Meer wurde durch die Einführung des Kompasses ermöglicht. In der Kriegstechnik erforderte die Erfindung neuer Waffen das Studium von Projektilbahnen.

Als eine der Folgen dieser tiefgreifenden sozialen, politischen und wirtschaftlichen Umwälzung ergaben sich eine Reihe neuer Problemstellungen für die Mathematik u.a. für die Trigonometrie. Diese wurde besonders durch Aufgabenstellungen aus dem Bereich der Navigation, Kalenderberechnung und insbesondere der Astronomie zu Weiterentwicklungen herausgefordert. Gerade die Astronomie verfügte als einzige Wissenschaft jener Zeit über die nötigen Beobachtungsdaten um z.B. auf Basis neuer Hypothesen berechneter Planetenbahnen auch empirisch überprüfen zu können. Als wesentliches Hilfsmittel bei den nötigen Berechnungen dienten trigonometrische Tafeln, deren notwendig gewordene Verbesserung wesentlich zur Herausbildung der Trigonometrie als eigenem Zweig der Mathematik beitrug. Zu jener Zeit wurden für die astronomischen Berechnungen die sogenannten "Alfonsinischen Tafeln" (benannt nach Alfons X von Kastillien, der sie 1230 erstellen ließ) herangezogen. Diese beruhten auf Kenntnissen der Westaraber, berücksichtigten aber nicht die Ergebnisse der ostarabischen Mathematik.

Die Neuberechnung der Alfonsinischen Tafeln wurde vom an der Universität Wien lehrenden Johannes von Gmunden (1380 - 1442) angeregt und von seinem Nachfolger Georg Peuerbach (1423 - 1461) durchgeführt. Im Zuge dieser Arbeit entstand die Idee, die bisher in vielen Arbeiten verstreut vorhandenen trigonometrischen Sätze, Ergebnisse und Tafeln zu ordnen und zu systematisieren. Diese Aufgabe wurde von Regiomontanus (eigentlich Johannes Müller) (1436 - 1476) durchgeführt, der dazu auch die inzwischen übersetzten Ergebnisse der arabischen Mathematik heranziehen konnte. Regiomontanus Werk "De triangulis omnimodis libri quinque" (Fünf Bücher über alle Arten von Dreiecken), dessen fünftes Buch unvollendet blieb, hatte einen wesentlichen Einfluß auf die Weiterentwicklung der Trigonometrie.

Dieses Beispiel zeigt auch, daß, wenn die praktischen Bedürfnisse der Anwendungen einer bestimmten Zeit abgedeckt sind, die mathematischen Interessen ein Gebiet weiterentwickeln.

## 4. ZUR ENTWICKLUNG DER LINEAREN OPTIMIERUNG

Als drittes Beispiel soll nun noch kurz auf die lineare Optimierung (= lineare Programmierung) kurz nach dem zweiten Weltkrieg eingegangen werden.

Wieder stellten außermathematische Erfordernisse in einer Umbruchzeit Anforderungen an die Mathematik. Dieses Mal gaben die immer komplexer und umfangreicher werdenden Planungsaufgaben im amerikanischen Militärbereich den Anstoß. Die explosionsartige Entwicklung dieser Aufgaben während des 2. Weltkrieges konnte mit den traditionellen Methoden nicht mehr bewältigt werden. So schreiben M.K. Wood und M.A. Geisler (aus Dantzig: "Lineare Programmierung und ihre Erweiterungen"):

> *Früher war es für einen Oberbefehlshaber möglich, die militärischen Operationen selbst zu planen. Als sich jedoch das Problem der Planung in bezug auf Raum, Zeit und Schwierigkeitsgrad vergrößerte, erreichte man die natürlichen Grenzen der Fähigkeiten einer Einzelperson. Die Militärgeschichte kennt viele Beispiele des Versagens von Befehlshabern, die sich zu sehr in Einzelheiten versenkten, und zwar nicht deshalb, weil sie nicht im Laufe der Zeit die Einzelheiten bewältigt hätten, sondern nur, weil sie die wesentlichen Einzelheiten nicht in der zur Verfügung stehenden Zeit meistern konnten. Als die Planungsprobleme komplexer wurden, wurde der Oberbefehlshaber allmählich mit einem Generalstab von Spezialisten umgeben, der ihm beim Fällen von Entscheidungen Hilfe geben konnte. Das Vorhandensein eines Generalstabs erlaubte die Unterteilung des Planungsprozesses und die Übergebe der Leitung der Teilpläne an Spezialisten. Dadurch erhielt der Oberbefehlshaber die Funktion, die Ziele auszusuchen, zu koordinieren, zu planen und Konflikte zwischen verschiedenen Stabsabteilungen zu schlichten.*

Damit nun die Planungsmethoden den neuen Anforderungen gewachsen waren, wurden nach dem 2. Weltkrieg Forschungsgruppen mit dem Ziel, optimale Methoden zu entwickeln, eingesetzt.

Diese Arbeiten markierten den Beginn der Entwicklung eines neuen Forschungszweiges der Mathematik, der inzwischen gleichberechtigt neben anderen steht. Es ist natürlich selbstverständlich, daß Ergebnisse, die für diese neue Theorie von Bedeutung waren schon in früheren Arbeiten vorhanden waren. Weiters ist der Fortschritt der Optimierungsmethoden untrennbar mit der Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen verknüpft.

Sofort nach der Aufhebung der von den Militärbehörden verhängten Informationssperre über den Bereich Optimierung, kam es zur Anwendung der neuentwickelten Methoden auf Planungsarbeiten der Unternehmensführungen. Die auch in diesem Bereich immer komplexer werdende Entscheidungsstruktur erforderte auch hier ein geeignetes Planungsinstrumentarium.

Wegen der strukturellen Gleichheit der Problemstellungen konnte nun auf die für militärische Aufgaben entwickelten Methoden zurückgegriffen werden.

Zum Abschluß sollen noch einige Gesichtspunkte hervorgehoben werden, die sich aus der geschichtlichen Betrachtungsweise ergeben:

a) Die Situation der anwendungsorientierten mathematischen Methoden steht in enger Verbindung zu den sozio-ökonomischen Bedingungen.

b) Stellen gesellschaftliche oder wirtschaftliche Umwälzungen neue und gesteigerte Anforderungen, so kommt es zu einer Extensivierung der bisher verwendeten Methoden.

c) Reicht die Auslotung der Verwendungsmöglichkeiten der vorhandenen Methoden zur Bewältigung der gestellten Aufgaben nicht aus, so kommt es zur Neuentwicklung von Verfahren.

d) Sind die von der Gesellschaft an die Mathematik gestellten Anforderungen bewältigt, so entwickeln die mathematischen Interessen ein Gebiet weiter und schaffen auch den für die Absicherung notwendigen theoretischen Hintergrund.

e) Reine und angewandte Mathematik müssen ihre Ergebnisse denselben Prüfungskriterien unterwerfen (kurz gesagt: Alle Mathematik ist rein). Nun gibt es Teile der Mathematik, die auch außerhalb dieser angewandt werden. Es ist daher nur sinnvoll zu unterscheiden zwischen Mathematik betreiben und Mathematik anwenden, d.h. charakteristisch ist der Prozeß der Anwendung, bei dem das "Modellbilden" im Mittelpunkt steht.

f) Durch die Anwendung von Mathematik auf komplexe Realsituationen mußte die Jahrtausende alte Vorstellung von der eindeutigen Zuordnung reales Problem - - mathematisches Lösungsverfahren aufgegeben werden. Beim Anwenden von Mathematik steht die kreative Tätigkeit des Modellbildens im Mittelpunkt. Dies bedeutet, daß Anwenden von Mathematik als intellektuelle Leistung gleichrangig neben die Forschung innerhalb der Mathematik tritt. Dadurch wurde die langdauernde Abwertung des Anwendens aufgehoben.

# II. EINIGE BEMERKUNGEN ZUM MATHEMATISIERUNGSPROZESS

## A) DER ANWENDUNGSPROZESS

Die Schwierigkeiten des Anwendens von Mathematik auf komplexe Probleme werden häufig unterschätzt. Anwenden läßt sich keinesfalls auf ein Einsetzverfahren in eine Theorie der reinen Mathematik reduzieren. Es ist ein Prozeß der Kreativität und Sachkenntnis vom Anwender erfordert. Nun soll der Vorgang des Anwendens kurz dargestellt werden, wobei als erklärendes Beispiel ein Problem aus der Sicherheitsfrage von Kernreaktoren verwendet wird. Dies insbesondere, da sich darin viele Schwierigkeiten wiederfinden.

### 1. AUSGANGSSITUATION (= PROBLEM) UND ERSTELLUNG DES REALMODELLS

In Wissenschaft, Technik, Wirtschaft, Politik etc. treten Fragen auf, die sich nicht ohne weiteres beantworten lassen, sondern tiefergehender Methoden zu ihrer Beantwortung bedürfen. Als erster Schritt wird nun versucht, das Problem möglichst genau zu formulieren. (Anwender weisen immer wieder auf Schwierigkeiten bei der Problemfestsetzung hin, die u.a. durch Kommunikationsbarrieren zwischen Problemsteller und Mathematiker hervorgerufen werden.) Ist dieses geschehen, so macht man sich ein "Bild" der Situation, d.h. es wird das Problem aus der Realität herausgelöst, indem wesentliche von unwesentlichen Einflüssen getrennt, Zusammenhänge festgelegt und auch Ziele gesetzt werden. Dabei spielen vor allem die Wertungen von vorhandenen Meßdaten, wissenschaftliche Theorien, aber auch Erfahrungen eine große Rolle. In der Literatur wird dieser Schritt als Erstellung eines Realmodells bezeichnet. Es soll darauf hingewiesen werden, daß gerade dieser Schritt, der vor dem Einsatz der Mathematik liegt, die später erhaltenen Ergebnisse wesentlich beeinflußt.

Sehen wir uns nun als Beispiel ein Teilproblem aus der Reaktorsicherheit an, nämlich das der Schnellabschaltung eines Reaktors. Diese wird bei gewissen Störfällen wie z.B. Stromausfall, Turbinenschnellabschaltung, Fehler in Regeleinrichtungen notwendig. Das Problem besteht nun darin eine Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Schnellabschaltung anzugeben. Da bisher kein Fall eines Versagens der Schnellabschaltung bekannt ist, fehlen die direkten Meßdaten für die statistische Berechnung der Zuverlässigkeit. Es ist daher notwendig andere Daten heranzuziehen. Bekannt ist eine Wahrscheinlichkeit für ein nicht vollständiges Einfahren einzelner Steuerstäbe in den Reaktor ($p = 10^{-4}$). Da bei dem Ausfall eines Steuerstabes die Schnellabschaltung noch voll funktionsfähig ist, mußte man festsetzen, wieviele Steuerstäbe für einen Störfall ausfallen müssen. Der berühmte "Rasmussen-Report" setzte fest, daß dieser Fall eintritt, wenn drei benachbarte Steuerstäbe nicht korrekt funktionieren.

Eine andere Erfahrung mit Systemen aus vielen baugleichen Komponenten besagten, daß nur in einem Prozent der Störfälle mehr als eine Komponente ausfällt.

Das angedeutete Beispiel soll verständlich machen, wieviel nur durch Erfahrung abgestützte Annahmen in die Modellerstellung eingehen, bevor das erste Mal mathematische Denkweisen einsetzen.

## 2. ERSTELLUNG EINES MATHEMATISCHEN MODELLS

Der nun folgende Schritt vom Realmodell zum mathematischen Modell bedeutet den Übergang von einer inhaltlichen zu einer formalen Theorie. Annahmen von Beziehungen, Zusammenhängen, aber auch Meßdaten müssen durch formale Zusammenhänge (Funktionen, Relationen etc.) beschrieben werden. (Empirische Funktionen müssen durch formale Funktionen ersetzt werden.) Dabei werden oft Stetigkeitsannahmen getroffen bzw. noch weitere Vereinfachungen vorgenommen, da sich zu komplexe Zusammenhänge einer mathematischen Behandlung entziehen. Gerade in dieser Phase wird es dem Mathematiker meist nur möglich sein, in Zusammenarbeit mit Wissenschaftern und Praktikern, aus deren Bereich das Realmodell stammt, die Korrekturen vorzunehmen, um der Gefahr zu entgehen, durch Fehler dabei die später erhaltenen Ergebnisse unbrauchbar zu machen.

Kehren wir nochmals zu unserem Problem der Schnellabschaltung zurück. Im Rasmussen-Report wurde als mathematisches Modell der Ergebnisbaum - bzw. Fehlerbaum verwendet, die auf einer Unabhängigkeit der Ereignisse und einer Art binärer Logik basieren. (Ein teilweiser Ausfall von Stäben wird einem vollständigen gleichgesetzt.)

## 3. FOLGERUNGEN AUS DEM MATHEMATISCHEN MODELL UND ERSTELLUNG EINES NUMERISCHEN MODELLS

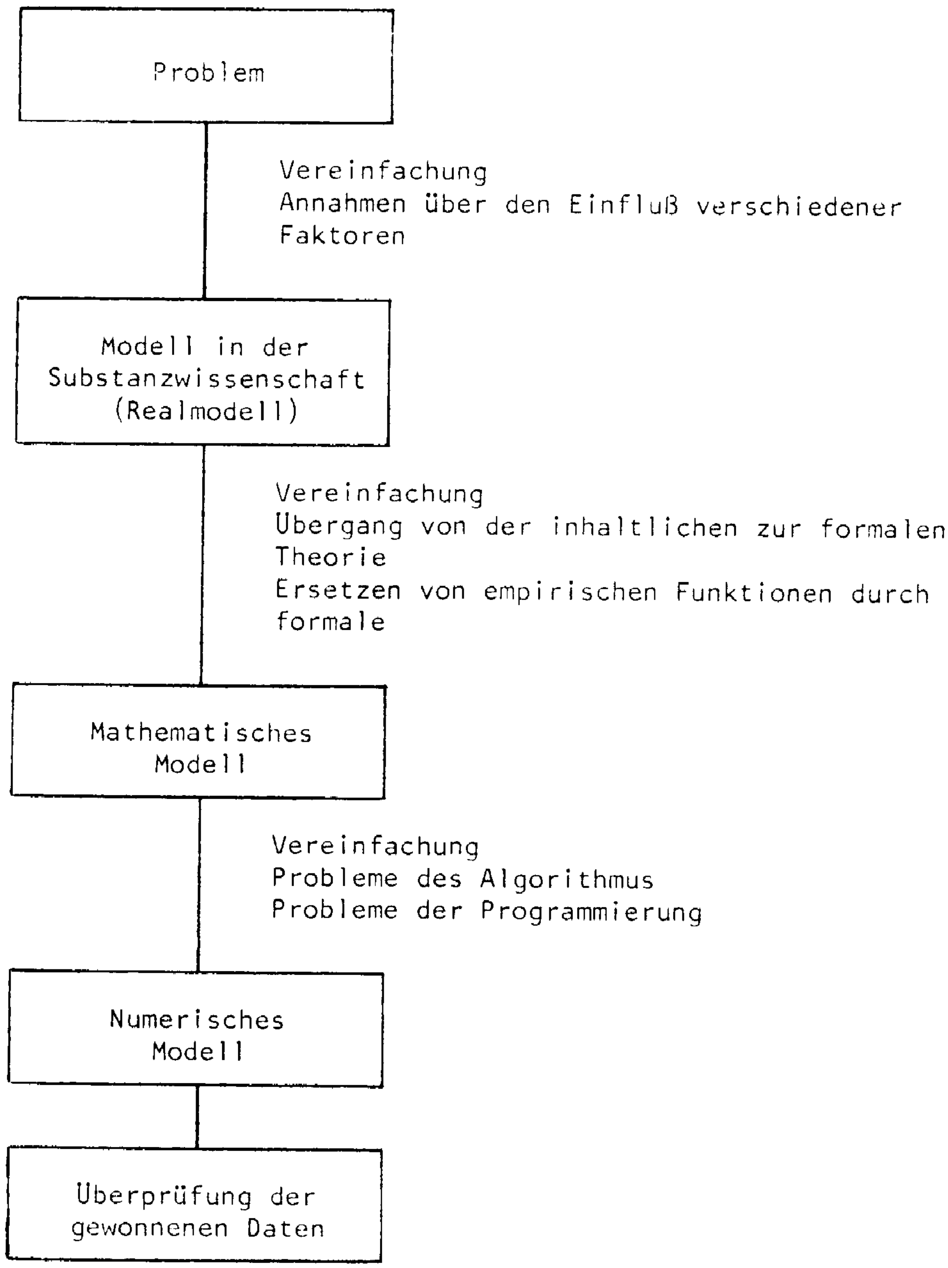
Nun kann im mathematischen Modell formal geschlossen werden. Dabei können häufig aufgrund der Theorie qualitative Aussagen gemacht werden (z.B. denke man dabei an die Lösungstheorie von Differentialgleichungen, aber auch an strukturelle Aspekte).

Meist ist es notwendig numerische Ergebnisse zu erhalten. Dies bedingt den Übergang zu einem numerischen Modell, wobei darunter alles subsummiert werden soll, was mit der numerischen Berechnung zu tun hat, u.a. auch Probleme der Programmierung. Dabei ergibt sich oft die Notwendigkeit weiterer Vereinfachungen.

In unserem Beispiel erhalten wir auf der Basis der Wahrscheinlichkeit des Ausfalls von drei benachbarten Steuerstäben $p = 10^{-12}$ und auf der Erfahrung mit komplexen Systemen $p = 10^{-6}$. Da es mathematisch nicht möglich ist, festzustellen welche der beiden Wahrscheinlichkeiten richtig ist, wurde von der Rasmussen-Gruppe das geometrische Mittel der beiden Wahrscheinlichkeiten genommen, d.h. $p = 10^{-9}$.

## 4. INTERPRETATION DER MATHEMATISCHEN FOLGERUNGEN IM KONTEXT DER AUSGANGSSITUATION UND ÜBERPRÜFUNG DER GÜLTIGKEIT AN DER REALITÄT

Da es sich bei den Anwendungsproblemen um inhaltliche und nicht um formale Probleme handelt, stellt sich nicht nur die Frage nach der formalen Richtigkeit, sondern die mathematischen Folgerungen und Ergebnisse müssen sich im Lichte der Realität bewähren. Dies ist besonders wichtig, da ja im Verlaufe des Anwendungsprozesses viele Annahmen, Abschätzungen, Wertungen etc. getroffen wurden, die sich wesentlich auf das Ergebnis auswirken. Auch dieser unbedingt notwendige Schritt bringt häufig große Schwierigkeiten mit sich, da die Ergebnisse oft nicht durch Messungen überprüft werden können, wie speziell unser Beispiel aus der Reaktorsicherheit zeigt. Den Abschluß dieses Den Abschluß dieses Punktes bildet eine zusammenfassende graphische Darstellung.




## B) ZUM MODELLBEGRIFF

Wie aus den bisherigen Erörterungen hervorgeht, besteht der Anwendungsprozeß aus der Erstellung von Modellen. Es liegt daher nahe sich mit dem Modellbegriff kurz auseinanderzusetzen.

Modell ist ein Schlüsselwortbegriff der heutigen Zeit. Es wird auch dementsprechend in vielen Situationen und Bereichen angewandt. Man denke an: Modell als verkleinerte Form eines realen Objekts - Modell als "Prototyp" einer Klasse von Objekten - Tiere sind Modell für den Menschen z.B. in der medizinischen Forschung - Gedankenmodelle für komplexe Vorgänge in der Realität -

- physikalische Modelle - mathematische Modelle - u.a.m.

Die aufgezählten Beispiele belegen die vielfältigen Verwendungsformen, die mit dem Begriff Modell zusammenhängen. Daher scheint es auch unmöglich den Modellbegriff definitorisch zu erfassen, ohne seinen Anwendungsbereich drastisch einzuschränken. Wir wollen daher als Arbeitshypothese ein Modell als ein "Ersatzobjekt" ansehen, das unter bestimmten Zielsetzungen konstruiert wird um zur Bearbeitung von Problemen beizutragen.

Eine Frage beschäftigt im Zusammenhang mit Modellen immer wieder und zwar die Frage nach ihrer "Glaubwürdigkeit". Denn von dieser hängt das Vertrauen ab, das man den im Modellbildungsprozeß erhaltenen Ergebnissen schenken darf. Gerade zu dieser wichtigen Frage gibt es sehr wenige Arbeiten. Die meisten Klassifikationen von Modellen wurden unter logischen Gesichtspunkten vorgenommen und können nur wenig zur Frage ihrer inhaltlichen Gültigkeit beitragen. Prinzipiell gibt es, unter Heranziehung der historischen Betrachtungen zwei große Gruppen von Modellen:

a) Prozesse, deren Zusammenhänge vom Menschen festsetzbar sind,

b) Prozesse, bei denen eine Festsetzung ihrer Zusammenhänge durch den Menschen nicht möglich ist.

ad a) Schon seit der Frühzeit der Verwendung von Mathematik diente diese dazu, Vorgänge des Geschäftslebens zu fixieren und damit zu objektivieren (z.B. Prozentrechnung). Diese Funktion hat die Mathematik bis zum heutigen Tage, man denke an Ware-Preisrelationen, Steuern, Festlegung von Wahlverfahren u.a.m.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß gerade diese Anwendungen im täglichen Leben eine große Rolle spielen und daher auch einen prägenden Einfluß auf das Bild von Mathematik ausüben.

ad b) Für diese Gruppe von Modellen möchte ich zu einer weiteren Unterscheidung eine Klassifikation von B. Booß verwenden.

α) Ideale Modelle: Diese sind Ausdruck einer ausgebauten und empirisch gut abgesicherten Theorie (z.B. Himmelsmechanik). Dies führt zu einer weitgehenden Übereinstimmung von berechneten Daten und deren empirischen Überprüfung an der Realität.

β) Faustformeln: Bei diesen Modellen gehen sowohl theoretische Überlegungen, wie auch Erfahrungswerte ein. Sie sind in vielen technischen Bereichen anzutreffen.

γ) ad-hoc-Modelle: Diese stellen in der Regel erste Ansätze dar und haben meist noch keine ausgebaute Hintergrundtheorie. Unser Beispiel aus der Reaktorsicherheit fällt in diese Gruppe. (Dies erhellt auch die Schwierigkeiten bei der Einschätzung von Expertenmeinungen in der Kernkraftdebatte.)

## III EINIGE METHODISCHE ÜBERLEGUNGEN

Die Modellklassifikationen führen auch zu zwei Gruppen in methodischer Hinsicht.

a) Probleme mit enger Bindung an das Lösungsverfahren
Bei diesen Beispielen, die im derzeitigen Mathematikunterricht in der Regel das Feld der Anwendungen abdecken, besteht eine eindeutige Zuordnung

$$\text{Problemklasse} \longleftrightarrow \text{Lösungsalgorithmus}$$

Die Hauptaufgabe bei diesen Beispielen besteht in der "Übersetzung" einer sprachlich formulierten Situation in einen mathematischen Ansatz.

Diese Beispiele haben für festsetzbare Zusammenhänge, ideale Modelle bzw. Faustformeln sehr wohl ihre Berechtigung, doch ist es notwendig, der realen Situation mehr Augenmerk zu schenken, Gründe des Zusammenhanges herauszuarbeiten und etwaige Gültigkeitsgrenzen aufzuzeigen.

Wichtig ist aber, daß die Schüler auch mit "echten" Mathematisierungen konfrontiert werden.

b) Mathematisierungsaufgaben
Charakteristisch für diese Beispiele ist die "offene" Problemstellung, ein bewußtes längeres Einlassen auf die reale Situation und viel Aktivität der Schüler bei der Modellerstellung.
Dabei müssen einige Anforderungen an das Modell gestellt werden

α) Die Situation muß aus der Erfahrungswelt der Schüler stammen.

β) Die Situation soll möglichst realitätsnah sein und eine Lösung des Problems "nahelegen" (Gefahr von "Schulbeispielen").

γ) Zumindest Teillösungen sollen mit den, den Schülern bekannten mathematischen Hilfsmitteln erreichbar sein. (Diese Bedingung ist nicht so einschränkend, da in der Praxis sehr viele Probleme auftreten, die für einen ersten ad-hoc Ansatz nur bescheidene mathematische Kenntnisse erfordern.)

δ) Modelle sollen immer zuerst umgangssprachlich formuliert werden um daraus die mathematische Fassung zu erarbeiten (Spracherziehung). Dabei ist immer darauf zu achten, daß außermathematische Annahmen klargestellt und begründet werden.

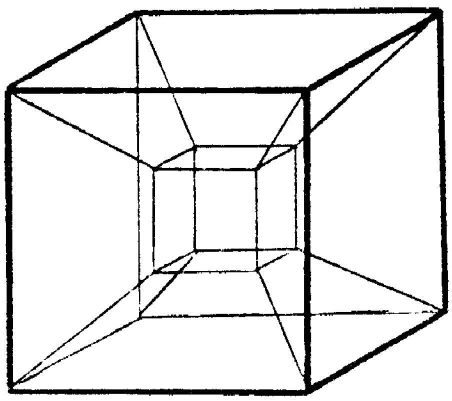
Zur Methodik des mathematisierenden Unterrichts gibt es eine Reihe von Vorschlägen, die alle auf einen schrittweisen Modellerstellungsvorgang hinzielen, wie im Punkt II angedeutet ist. Ein Vorschlag dazu wurde in G. Malle (Vorträge der ÖMG-Lehrerfortbildungstagung 1979) gegeben.

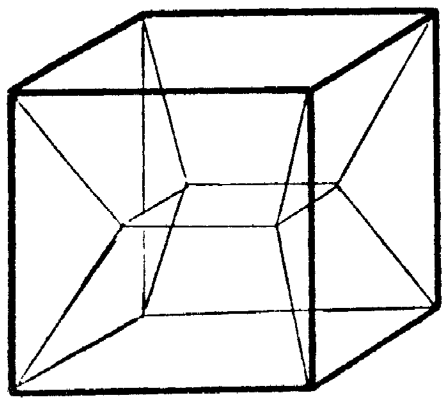
## IV. BEISPIELE ZUM MATHEMATISIEREN

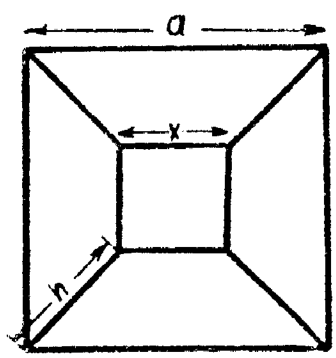
In der didaktischen Literatur wurden in letzter Zeit viele Beispiele zu diesem Thema veröffentlicht. Dazu sei auf Fahrpreisbeispiele, Energiefragen, Abstimmungsverfahren etc. hingewiesen.

Den Abschluß dieses Beitrags soll ein Beispiel bilden, das aus der Diplomarbeit von Ch. Walter stammt und die Grenzen des Modellbildens aufzeigt.

Taucht man das Drahtmodell eines Würfels in eine Seifenlösung, so können folgende beiden Figuren entstehen. (Figur 1 entsteht bei kurzem Wiedereintauchen)







Das Problem besteht nun darin, zu untersuchen ob es ein theoretisches Modell gibt, bei dem die Größe des inneren Körpers (bzw. der inneren Fläche) aus der Größe des Drahtmodells folgt.

Als physikalischer Hintergrund steht uns zur Verfügung, daß die Seifenhaut eine minimale Oberfläche annimmt.
Für unser Problem bedeutet dies:

$$A = O_W + 12A$$

$$A(x) = 6x^2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(a^2 - x^2)$$

$$A'(x) = 3(2 - \sqrt{2}).2x = 0 \iff x = 0$$

d.h. der innere Würfel müßte zu einem Punkt zusammenschrumpfen. Da die Realität dem widerspricht, muß nach Fehlern oder zu starken Einschränkungen bei den Modellannahmen gesucht werden. Die naheliegendste Folgerung ist, daß Luft eingeschlossen wurde, deren Druck bei unserem Modell unberücksichtigt blieb. (Bei genauerer Betrachtung des Würfels bemerkt man auch, daß die Flächen nach außen gewölbt sind.)

Es ist bisher noch nicht gelungen die Modellerstellung so weit zu verbessern, daß ein einigermaßen befriedigendes Ergebnis daraus resultieren würde.

## V. LITERATUR


B. Booß: Innermathematische Systematik und Struktur der Wirklichkeit - - Erfahrungen mit dem Projektstudium in Roskilde in: Ralf Schaper (Hrsg.), Hochschuldidaktik der Mathematik AHD, Hochschuldidaktische Materialien 84 (1982) 80-117.

E. Cassim/S. Bottêro/S.Vercoutter (Hrsg.): Die altorientalischen Reiche I, II, III. Fischer Weltgeschichte Bd. 2, 3, 4, Fischer Verlag, Frankfurt/Main 1965.

P. Damerow/W. Lefêvre: Rechenstein, Experiment, Sprache. Klett-Cotta Verlag (1981).

G.B. Dantzig: Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1966).

J. Høyrup: Influences of Institutionalized Mathematics Teaching on the Development and Organization of Mathematical Tought in the Premodern Period. Materialien und Studien Bd. 20.

G. Malle: Wirtschaftsmathematik in der Schule. ÖMG-Didaktik-Reihe 4 (1979) 116-129.

O. Neugebauer: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften I. Springer Verlag, Heidelberg-New York (1969).

W. Peschek: Anwendungsorientierte Schulmathematik (Am Beispiel Wirtschaftsmathematik) ÖMG-Didaktik-Reihe 5 (1980) 119-132.

H.G. Steiner: What is Applied Mathematics? Indian Journal of Mathematics Teaching III (1976) 1-18.

H.G. Steiner: Zur Methodik des mathematisierenden Unterrichts, in: W. Dörfler-R. Fischer: Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II. Johannes Heyn, Klagenfurt (1976).

A. Szabo: Anfänge der griechischen Mathematik. Oldenburg Verlag, München-Wien (1968).

B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart (1966).

Ch. Walter: Angewandte Mathematik im Schulunterricht. Diplomarbeit, Linz (1982).